10. cvičení - řešení

15. 12. 2022

Příklad 1 (a) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (b)

$$((x^2-2x+3)e^x)' = ((x^2-2x+3))' \cdot e^x + (x^2-2x+3) \cdot (e^x)' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+3)e^x = (x^2+3)e^x.$$

Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$.

Příklad 1 (c) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (d)

$$\begin{aligned}
&(x \log x + x \log_3 x + 2e^x)' = x' \log x + x(\log x)' + x' \log_3 x + x(\log_3 x)' + (2e^x)' = \\
&= \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \log_3 x + x \cdot (\frac{\log x}{\log 3})' + 2e^x = \log x + 1 + \log_3 x + \frac{1}{\log 3} + 2e^x
\end{aligned}$$

Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$ ze stejného důvodu.

Příklad 1 (e) $((\frac{3}{2})^x)' = (e^{x \cdot \log \frac{3}{2}})' = \log \frac{3}{2} \cdot e^{x \cdot \log \frac{3}{2}} = \log \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$, nebo lze alternativně použít vzorec $(c \cdot a^x)' = c \log a \cdot a^x$ Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, neboť mocněný výraz je kladný.

Příklad 1 (f) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce i derivace jsou definovány na $R \setminus \{0\}$, neboť potřebujeme nenulové číslo ve jmenovateli.

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2-2x+7}{x^2+5x-6}\right)' = \frac{(x^2-2x+7)' \cdot (x^2+5x-6) - (x^2-2x+7) \cdot (x^2+5x-6)'}{(x^2+5x-6)^2} = \\
&= \frac{(2x-2) \cdot (x^2+5x-6) - (x^2-2x+7) \cdot (2x+5)}{(x^2+5x-6)^2} = \\
&= \frac{2x^3+8x^2-22x+12-(2x^3+x^2+4x+35)}{(x^2+5x-6)^2} = \\
&= \frac{7x^2-26x-23}{(x^2+5x-6)^2},
\end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$ kvůli nenulovosti jmenovatele.

Příklad 1 (h) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \log x)' = c \cdot \frac{1}{x}$ a $(c \cdot \cos x)' = c \cdot (-\sin x)$. Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace je pak také definována na $(0, \infty)$.

Příklad 1 (i)

$$\left(\frac{x\cos x - 2}{\log x}\right)' = \frac{(x\cos x - 2)' \cdot (\log x) - (x\cos x - 2) \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} =$$
$$= \frac{(\cos x - x\sin x) \cdot (\log x) - (x\cos x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(\cos x - x\sin x) \cdot (\log x) - x\cos x + 2}{x(\log x)^2},$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $(0, \infty) \setminus \{0\}$ kvůli definičnímu oboru logaritmu a požadavku na nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (j) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \tan x)' = c \cdot \frac{1}{\cos x^2}$ a $(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (k) $(\sin x \cos x - \tan x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' - (\tan x)' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos x^2}$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (l) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arcsin x)' = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce arcussinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (m) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arccos x)' = c \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezní plynoucí z definičního oboru funkce arcuscosinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 2 (a) Nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme za věty o derivaci složené funkce

$$\left((x^2 + 50x + 12)^{78}\right)' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(x^2 + 50x + 12)' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(2x + 50).$$

Odtud vidíme, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

Příklad 2 (b) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Použijeme vzorce pro derivaci součinu tří funkcí $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Počítejme

$$\left(x^3(x+2)^8(x-7)^{-11}\right)' = 3x^2 \cdot (x+2)^8(x-7)^{-11} + x^3 \cdot 8(x+2)^7 \cdot (x-7)^{-11} +$$
$$+ x^3(x+2)^8 \cdot (-11)(x-7)^{-12} = -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}.$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Příklad 2 (c) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\text{arccotan}(2x))' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$$

a vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme dle pravidla pro derivaci součinu

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 2 (e) Spočítáme, že $x^2+x+2>0$ na $\mathbb{R}$, a tudíž $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$\big(\log(x^2+x+2)\big)' = \frac{1}{x^2+x+2}\cdot(x^2+x+2)' = \frac{2x+1}{x^2+x+2}.$$

Z toho je vidno, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$\big(\cos(x^3-x+2)^9\big)' = -\sin(x^3-x+2)^9\cdot\big((x^3-x+2)^9\big)' = -\sin(x^3-x+2)^9\cdot 9(x^3-x+2)^8\cdot(3x^2-1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (g) Chceme, aby výraz v odmocnině byl kladný. Odtud dostáváme $\mathcal{D}_f = [-2,2]$. Spočítáme derivaci

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-2,2)$.

Příklad 2 (h)
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$
Definiční obor f
$9-x^2>0 \iff (3-x)(3+x)>0 \iff x\in(-3,3)=D(f)$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)' = \frac{x'\cdot\sqrt{9-x^2} - x\cdot\left(\sqrt{9-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)} = \frac{1\cdot\sqrt{9-x^2} - x\cdot\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(9-x^2)'}{9-x^2} =$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot(-2x)}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2)\cdot\sqrt{9-x^2}} = 9\cdot(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Definičí obor f' $D(f') = (-3,3)$

Příklad 2 (i)
$f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)' = \frac{\left(x^2(1-x)^3\right)' \cdot (1+x) - (x^2(1-x)^3) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{\left((x^2)'(1-x)^3 + x^2\left((1-x)^3\right)'\right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{\left(2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2 \cdot (1-x)'\right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{2x(1-x)^3(1+x) - 3x^2(1-x)^2(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{x(1-x)^2\left(2(1-x^2) - 3x(1+x) - x(1-x)\right)}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2\left(2 - 2x^2 - 3x - 3x^2 - x + x^2\right)}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{x(1-x)^2\left(2 - 4x^2 - 4x\right)}{(1+x)^2}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Příklad 2 (j)
$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1)(-2)x^{-3} = 2e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 2 (k)
$f(x) = x^x$
Definiční obor f $D(f) = (0, \infty)$, protože z definice obecné mocniny plyne, že $x^x = e^{x \log x}$.
Derivace f
Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot \left(x' \cdot \log x + x \cdot (\log x)'\right) =$$
$$= e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1)$$

Definičí obor f'
$D(f') = (0, \infty)$

Příklad 2 (l)

$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
Definiční obor f
$D(f) = (0, \infty)$
Derivace f
Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}}\right)' = \\
&= e^{\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \log x + x \cdot (\log x)'\right) = \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\log x + x\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x}{x^2} + 1\right)
\end{aligned}
$$

Definičí obor f'
$D(f) = (0, \infty)$

Příklad 2 (m)
$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
Definiční obor f
Opět z definice obecné mocniny plyne, že je potřeba, aby $\sin x > 0$. Tedy $D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.
Derivace f

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \left(e^{\cos x \cdot \log \sin x}\right)' = \\
&= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot (\cos x \cdot \log \sin x)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left((\cos x)' \cdot \log \sin x + \cos x \cdot (\log \sin x)'\right) = \\
&= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'\right) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)
\end{aligned}
$$

Definičí obor f'
$D(f') = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Příklad 2 (n)
$f(x) = \arcsin(\cos x)$
Definiční obor f Definiční obor arcsin je interval $[-1, 1]$ a obor hodnot cos je $[-1, 1]$. Proto $D(f) = D(\cos) = \mathbb{R}$.
Derivace f

$$
f'(x) = (\arcsin(\cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}
$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R}$

Příklad 2 (o)
$f(x) = \log(\arccos x)$
Definiční obor f
$D(f) = [-1, 1)$
Derivace f

$$f'(x) = (\log(\arccos x))' = \frac{1}{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definičí obor f'
$D(f') = (-1, 1)$ a v bodě -1 má funkce pouze jednostrannou derivaci.

Příklad 2 (p)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotan} \frac{\sqrt{2}}{x}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotan} \frac{\sqrt{2}}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2}{2 + x^2} \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2 + x^2}$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 2 (q)
$f(x) = e^{x^2 - x + 1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R}$
Derivace f

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x^2-x+1} - \log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot\left(x^2-x+1\right)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)' = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(e^{2x}\right)'\cdot\left(e^{2x}+1\right) - e^{2x}\cdot\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}\cdot\left(e^{2x}+1\right) - e^{2x}\cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1}\cdot(2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\frac{e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R}$

Příklad 2 (r)
$f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R}\setminus(0,1)$
Derivace f

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \\
&= \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)' - \frac{(\log x)'\cdot\sqrt{x^2-1} - \log x\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)' - \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2-1} - \log x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\cdot\left(x^2-1\right)'}{x^2-1} = \\
&= \frac{2x}{2x^2\cdot\sqrt{x^2-1}} - \frac{x^{-1}\sqrt{x^2-1} - \log x\frac{2x}{2}\cdot 2x}{x^2-1} = \\
&= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1} - \log x\cdot 2x^2}{x^3-x}
\end{aligned}
$$

Definičí obor f'
$D(f') = \mathbb{R}\setminus(0,1)$

Příklad 2 (s)
$f(x) = x\left(\arcsin(x^3)\right)^2$
Definiční obor f $D(f) = [-1, 1]$
Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x\left(\arcsin(x^3)\right)^2\right)' = x' \cdot \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2 + x \cdot \left(\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2\right)' = \\
&= \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2 + x \cdot 2 \cdot \arcsin\left(x^3\right) \cdot \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)' = \\
&= \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2 + 2x \cdot \arcsin\left(x^3\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} \cdot \left(x^3\right)' = \\
&= \left(\arcsin\left(x^3\right)\right)^2 + 2x \cdot \arcsin\left(x^3\right) \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}
\end{aligned}$$

Definičí obor f'
$D(f') = (-1, 1)$ a v krajních bodech existují jednostranné derivace.

Příklad 3 (a)
$f(x) = |x|$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R}$
Derivace f
Platí, že $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$
Počítejme f' na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ zvlášť. Na závěr vyřešíme bod 0.
Pro $x \in (-\infty, 0)$ platí:

$$f'(x) = (-x)' = -x' = -1$$

Pro $x \in (0, \infty)$ platí:

$$f'(x) = x' = 1$$

V bodě 0 spočtěme nejdříve jednostranné derivace. Funkce f je v 0 zleva i zprava spojitá, tedy dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky (platí i její varianta pro derivaci zleva) platí, že $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} -1 = -1$ a $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$.
V bodě 0 má funkce f pouze jednostranné derivace, neb se neshodují.
Definiční obor f'
$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 3 (b)
$f(x) = \min\{x^2, -x^2 + 3x\}$
Definiční obor f
$D(f) = \mathbb{R}$

Derivace f

Nejdříve zjistěme, jak ta funkce vlastně „vypadá“. Tj. vyšetřeme, na kterých intervalech je která z funkcí v minimu větší. Řešme tedy následující nerovnost.

$$\begin{aligned} x^2 &< -x^2+3x \\ 2x^2-3x &< 0 \\ x(2x-3) &< 0 \\ x\left(x-\frac{3}{2}\right) &< 0 \end{aligned}$$

Řešením nerovnosti je $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Z toho dostáváme následující.

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ -x^2+3x, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(0, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$

Počítejme tedy f' na intervalech $\left(0, \frac{3}{2}\right), (-\infty, 0), \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ zvlášť a pak vyřešme body 0 a $\frac{3}{2}$.

Pro $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ platí:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x.$$

Pro $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ platí:

$$f'(x) = \left(-x^2+3x\right)' = -2x+3.$$

Opět dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky platí nsáledující.

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 2x = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} -2x+3 = 3$

$f'_+(\frac{3}{2}) = \lim_{x\to \frac{3}{2}+} f'(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}+} -2x+3 = 0$

$f'_-(\frac{3}{2}) = \lim_{x\to \frac{3}{2}-} f'(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}-} 2x = 3$

Jednostranné derivace se neshodují, tedy derivace jako takové v daných bodech neexistují.

Definiční obor f'

$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$

Příklad 3 (c)

$f(x) = |\log|x||$

Definiční obor f

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Derivace f

Nejdříve vyšetříme funkci. Z definice absolutní hodnoty plyne, že:

$f(x) = \begin{cases} \log x, & x \in [1, \infty) \\ -\log x, & x \in [0, 1) \\ -\log(-x), & x \in (-1, 0) \\ \log(-x), & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$

Počítejme na intervalech zvlášť.

$$x \in (1,\infty) \implies f'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x}$$
$$x \in (0,1) \implies f'(x) = (-\log x)' = -\frac{1}{x}$$
$$x \in (-1,0) \implies f'(x) = (-\log(-x))' = -\frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x}$$
$$x \in (-\infty,-1) \implies f'(x) = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

Dále platí dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x} = -1$$
$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} -\frac{1}{x} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -\frac{1}{x} = -\infty$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x} = -\infty$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} -\frac{1}{x} = -1$$
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x} = 1$$

V bodech $\{-1,0,1\}$ jednostranné derivace buď neexistují (vycházejí nekonečno) nebo nevycházejí stejně. Proto ve zmíněných bodech derivace neexistují.

Definiční obor f'

$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$

Příklad 3 (d)

Definiční obor $f(x) = e^{\log|x|}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Všimněme si, že na definičním oboru lze funkci přepsat jako $f(x) = |x|$

Pak $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty,0) \\ x, & x \in (0,\infty). \end{cases}$

Derivace f

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty,0) \\ 1, & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Definiční obor f'

$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Příklad 3 (e)

Definiční obor $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,0] \\ \log(1+x) & x \in (0,\infty). \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}$
Derivace f Derivujeme pouze na otevřených intervalech, krajní bod vyřešíme zvlášť.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1+x} & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

V nule vyšetřeme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\log(1+h) - \log(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\log(1+h)}{h} \overset{\text{známá lim}}{=} 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{0 + h - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

Tedy limita v nule je rovna jedné (protože se jednostrané limity rovnají).
Definiční obor f'
$D(f') = \mathbb{R}$